MÉTHODOLOGIE I

SUITES RÉCURRENTES ET IMPLICITES.

L'objectif de ce travail est de passer en revue l'ensemble des méthodes qui permettent d'étudier les suites définies par une relation de récurrence (non nécessairement linéaire) ou les suites définies comme solution d'une équation (suites implicites).

Dans le chapitre 10, nous étudierons les méthodes qui permettent de s'attaquer aux suites récurrentes linéaires d'ordre supérieur, comme par exemple la suite de Fibonacci $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Une technique d'analyse qui passe par la résolution de l'équation caractéristique est présentée dans le TD01.

Exercice 1.- ***Préliminaires.***

1. Énoncer le théorème de la bijection. Quel rôle joue-t-il dans l'étude des suites implicites ?
2. En s'inspirant des exemples donnés en cours, proposer une méthode qui permette de donner le sens de variation d'une suite implicite.
3. Comment écrire un programme Python qui génère les termes d'une suite récurrente ?
4. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par son premier terme et par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec une fonction f *croissante*. Que peut-on dire sur la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Il n'y a pas d'équivalent de ce résultat lorsque la fonction est décroissante.
5. On considère une suite définie par la donnée de son premier terme et par $u_{n+1} = f(u_n)$. Qu'est-ce qu'un intervalle stable pour f ?
   - **a.** Comment peut-on exploiter un intervalle stable pour étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   - **b.** Montrer qu'un intervalle stable permet de minorer et majorer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. On suppose que l'on a montré qu'une suite récurrente converge (par exemple en ayant appliqué le théorème de la limite monotone. Énoncer le théorème du point fixe. Qu'en déduit-on comme informations sur la limite de la suite ?
7. Énoncer le théorème des accroissements finis. Quel rôle joue-t-il dans l'étude des suites récurrentes ?

Correction 1.-
C'est du cours.

Exercice 2.- *D'après* ***EDHEC 2000.***
Pour tout entier supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4.$$

1. **a.** Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n.

   b. Calculer u_1 et u_2.

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

c. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$.

2. **a.** Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

b. En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$ puis les variations de la suite (u_n).

c. Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

3. **a.** Déterminer la limite de (u_n^n) lorsque n tend vers $+\infty$.

b. Donner enfin la valeur de ℓ.

4. (Cubes) Montrer que la série de terme général $\frac{2}{3} - u_n$ est convergente.

Correction 2.- **1.** **a.** On veut appliquer le théorème de la bijection. En effet, on constate facilement que

- La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Elle est strictement croissante, car la fonction dérivée $f_n'(x) = nx^{n-1} + 18x$ est positive pour tout $x \geqslant 0$.
- $f_n(0) = -4$ et $\lim\limits_{n\to\infty} = +\infty$.

On en déduit qu'il existe un unique nombre réel positif u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.

b. Le nombre u_1 est l'unique solution positive de l'équation

$$x + 9x^2 - 4 = 0.$$

C'est une équation du second degré qui a une solution négative et une solution positive. On trouve la solution positive avec la méthode habituelle. Ainsi

$$u_1 = \frac{-1 + \sqrt{145}}{2}.$$

Le nombre u_2 est l'unique solution positive de l'équation

$$x^2 + 9x^2 - 4 = 10x^2 - 4 = 0.$$

Cette équation a deux solutions $\pm\sqrt{\frac{2}{5}}$ mais l'une d'entre elle ne convient pas puisqu'elle est négative. On obtient

$$u_2 = \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

c. On a déjà remarqué que la fonction f_n est strictement croissante. Par ailleurs $f_n(0) = -4$ donc $u_n > 0$ et $f_n\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 9\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 = \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0$ donc $u_n < \frac{2}{3}$.

2. **a.** Calculons pour tout $x \in]0,1[$,

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} + 9x^2 - 4 - \left(x^n + 9x^2 - 4\right) = x^{n+1} - x^n = x^n\left(x - 1\right).$$

Cette quantité est strictement négative puisque, pour $x \in]0,1[$, $x^n > 0$ et $1 - x < 0$. On en déduit donc que $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

b. Puisque $0 < u_{n+1} < \frac{2}{3}$, on sait que u_{n+1} est en particulier dans l'intervalle $]0,1[$. On peut donc lui appliquer l'inégalité précédente : on a

$$f_{n+1}(u_{n+1}) < f_n(u_{n+1}).$$

Or, on sait que $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ (c'est la définition de u_{n+1}). Cette dernière inégalité se simplifie donc en $0 < f_n(u_{n+1})$. D'autre part, $f_n(u_n) = 0$. Ainsi

$$f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n).$$

Puisque f_n est strictement croissante, cela montre que

$$u_{n+1} > u_n.$$

Autrement dit, (u_n) est croissante.

c. On applique le théorème de la limite monotone : la suite (u_n) est croissante (d'après ce qui précède) et majorée par $\frac{2}{3}$. On en déduit qu'elle est convergente.

3. a. On sait $0 < u_n < \frac{2}{3}$ donc aussi $0 < u_n^n < \left(\frac{2}{3}\right)^n$. D'autre part la suite $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)_n$ tend vers 0. Par le théorème d'encadrement on conclut que la suite (u_n^n) tend aussi vers 0.

b. Par définition de u_n, on
$$u_n^n + 9u_n^2 - 4 = 0.$$
Passons à la limite lorsque n tend vers l'infini dans cette égalité. Il vient (car $u_n^n \to 0$) :
$$9l^2 = 4.$$
On en déduit que $l = \frac{2}{3}$. En effet, la solution $l = -\frac{2}{3}$ est absurde puisque $0 \leqslant l \leqslant \frac{2}{3}$.

4. En utilisant encore la définition, on a
$$0 = u_n^n + 9u_n^2 - 4 = u_n^n + 9\left(u_n - \frac{2}{3}\right)\left(u_n + \frac{2}{3}\right).$$
Puis
$$\frac{2}{3} - u_n = \frac{u_n^n}{9\left(u_n + \frac{2}{3}\right)}.$$
On a pu inverser $u_n + \frac{2}{3}$ car, puisque $u_n > 0$, cette quantité ne s'annule jamais. Par ailleurs, $u_n + \frac{2}{3} \geqslant \frac{2}{3}$ et $u_n^n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$. On en déduit que
$$0 < \frac{2}{3} - u_n \leqslant \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{6}.$$
La série de terme général $\frac{2}{3} - u_n$ est une série à termes positifs et on peut lui appliquer le théorème de comparaison. En effet, la série de terme général $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{6}$ est convergente (c'est, à une constante près, une série géométrique). Puisque $\frac{2}{3} - u_n \leqslant \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{6}$, on en déduit que la série de terme général $\frac{2}{3} - u_n$ est elle aussi convergente.

Exercice 3.- *D'après **EML 2002**.*
On considère, pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction polynomiale $P_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par, pour tout $x \in [0, +\infty[$,
$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots - \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}.$$

I : étude des fonctions polynomiales P_n.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +\infty[$,
$$P_n'(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1},$$
où P_n' est la fonction dérivée de P_n.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, établir les variations de P_n sur $[0, +\infty[$ et dresser le tableau de variations de P_n.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(1) < 0$.

4. a. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$,
$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1}\left(\frac{-1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2}\right).$$

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(2) \geqslant 0$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in [1, +\infty[$ admet une solution et une seule notée x_n et que
$$0 < x_n \leqslant 2.$$

6. Écrire un programme en Scilab qui calcule une valeur approchée décimale de x_2 à 10^{-3} près.

II : Limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$**.**

1. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$,

$$P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1} dt.$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1} dt = \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1} dt.$$

3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \geqslant 1$,

$$t^{2n} - 1 \geqslant n(t^2 - 1).$$

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1} dt \geqslant \frac{n}{2} (x_n - 1)^2,$$

puis

$$0 < x_n - 1 \leqslant \frac{\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{n}}.$$

5. Conclure sur la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction 3.-

I : étude des fonctions polynomiales P_n**.**

1. On dérive la somme termes à termes (la dérivée est une opération linéaire). Chacun des termes et dérivable sur $[0, +\infty[$ et

$$P_n'(x) = -1 + x - x^2 + \cdots - x^{2n-2} + x^{2n-1} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k x^{k-1} = -\sum_{k=1}^{2n} (-x)^{k-1}.$$

On reconnaît maintenant la somme des termes d'une suite en progression géométrique, dont on connaît une expressions simple. Il vient

$$P_n(x)' = -\frac{1-(-x)^{2n}}{1-(-x)} = -\frac{1-x^{2n}}{1+x} = \frac{x^{2n}-1}{1+x}$$

2. La dérivée de P_n sur $[0, +\infty]$ ne s'annule qu'en 1, elle est négative avant 1 et positive après. On en déduit que P_n est décroissante sur $[0, 1]$ puis croissante sur $[1, +\infty]$

3. D'après la définition de P_n, on a

$$P_n(1) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Regroupons 2 par 2 les termes de cette somme, c'est-à-dire,

$$P_n(1) = \left(-1 + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k}\right).$$

Pour tout $k = 1, \cdots, n$, on

$$\frac{1}{2k} < \frac{1}{2k-1},$$

de sorte que $P_n(1)$ apparaît comme une somme de nombres négatifs et en particulier

$$P_n(1) < 0.$$

4. **a.** On a

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^k x^k}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k x^k}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} - \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \\ &= P_n(x) + x^{2n+1}\left(\frac{-1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2}\right). \end{aligned}$$

b. On procède par récurrence sur $n \geqslant 1$

Initialisation. Calculons $P_1(2) = -2 + \frac{2^2}{2} = 0$ de sorte que la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité. Supposons que $P_n(2) \geqslant 0$ pour un entier n arbitraire. Alors, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} P_{n+1}(2) &= P_n(2) + 2^{2n+1}\left(\frac{2}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= P_n(2) + 2^{2n+1}\left(\frac{2(2n+1) - 2n - 2}{(2n+1)(2n+2)}\right) \\ &= P_n(2) + 2^{2n+1}\left(\frac{2n}{(2n+1)(2n+2)}\right). \end{aligned}$$

On voit maintenant que $P_{n+1}(2)$ est un nombre positif

Conclusion. La propriété est donc montrée par récurrence.

5. On applique le théorème de la bijection : P_n est continue et strictement croissante sur $[1, 2]$, $P_n(1) < 0$ et $P_n(2) > 0$. Il existe donc une unique solution x_n pour l'équation $P_n(x) = 0$.

6. On peut par exemple utiliser une méthode de dichotomie.

```python
def g(x):
    return -x+(x**2)/2 - (x**3)/3 + (x**4)/4


def valeurapprochee(epsilon):
    a = 0
    b = 1
    while b-a > epsilon:
        m = (a+b)/2
        if g(m) == 0:
            return m
        elif g(a)*g(m) > 0:
            a = m
        else:
            b = m
    return a


solution = valeurapprochee(10**(-3))
print(solution)
```

II : Limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. On a
$$\int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt = \int_0^x P_n'(t)dt = P_n(x) - P_n(0) = P_n(x)$$
car $P_n(0) = 0$.

2. D'une part on a
$$\int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt = P_n(x_n) - P_n(1) = -P_n(1)$$
D'autre part,
$$\int_0^x \frac{1-t^{2n}}{t+1}dt = -\int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt = -P_n(1).$$

3. On étudie la différence des deux membres de l'inégalité. On pose
$$f_n(t) = t^{2n} - 1 - nt^2 + n$$
et on cherche le signe de f_n sur $[1, +\infty[$. Or
$$f_n'(t) = 2nt^{2n-1} - 2nt = 2n(t^{2n-1} - t)$$
Pour $t \geqslant 1$, on a $t^{2n-1} \geqslant t$ de sorte que $f_n'(t) \geqslant 0$ et que f est croissante. On en déduit que $f_n(t) \geqslant f_n(1) = 0$. Puisque f_n est toujours positive, c'est donc que
$$t^{2n} - 1 \geqslant n(t^2 - 1).$$

4. On sait que $x_n \geqslant 1$. On peut donc appliquer l'inégalité que l'on vient de démontrer pour chaque $t \in [1, x_n]$. On obtient
$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt \geqslant \int_1^{x_n} \frac{n(t^2-1)}{t+1}dt = \int_1^{x_n} n(t-1)dt = \left[\frac{n}{2}(t-1)^2\right]_1^{x_n} = \frac{n}{2}(x_n-1)^2$$
Cela traite la première partie de la question. Pour la seconde, on réinjecte cette inégalité dans le résultat de la question **2.**. Il vient
$$\frac{n}{2}(x_n-1)^2 \leqslant \int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt = \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}dt.$$
Or, pour tout $0 \leqslant t \leqslant 1$, on a $1 - t^{2n} \leqslant 1$, ce qui donne
$$\frac{n}{2}(x_n-1)^2 \leqslant \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2.$$
D'où
$$(x_n-1)^2 \leqslant \frac{2\ln 2}{n}$$
et
$$x_n - 1 \leqslant \sqrt{\frac{2\ln 2}{n}}.$$
À cela s'ajoute que $x_n - 1 \geqslant 2$, ce que l'on sait depuis **I.5**

5. Il reste à appliquer le théorème d'encadrement et, puisque $\sqrt{\frac{2\ln 2}{n}}$ tend vers 0, on conclut que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Compléments (préparation top 6)

Il arrive que l'on rencontre des suites définies par la donnée du premier terme et une relation "de récurrence" de la forme

$$u_{n+1} = f_n(u_n)$$

où f_n est une suite de fonctions (qui change avec n). Il n'existe aucune méthode systématique pour étudier la limite de ces suites et il faudra souvent faire preuve d'initiative. Cependant, si l'exercice ne donne pas de meilleure indication, on peut essayer la stratégie suivante.

1. On suppose que la limite ℓ existe. Cette limite est donc solution de l'équation

$$\ell = f_n(\ell).$$

2. On résout cette équation. Dans **certains** cas, la solution ℓ est unique et ne dépend pas de n (attention, rien n'est garanti).

3. On pose alors $v_n = u_n - \ell$ et on cherche une relation de récurrence qui permette de montrer que cette suite tend vers 0.

Exercice 4.- *Un exemple (**difficile**).*
Trouver la limite de la suite définies par $u_1 > 0$ et par

$$(n+2)^2 u_{n+1} = n^2 u_n - (n+1).$$

Correction 4.-
On essaye de suivre la méthode proposée. Supposons donc que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ait une limite ℓ. Cette limite vérifie nécessairement

$$(n+2)^2\ell = n^2\ell - (n+1)$$

c'est-à-dire

$$(4n+4)\ell = -(n+1)$$

ou encore $\ell = -\frac{1}{4}$. On va donc tenter notre chance avec la suite $v_n = u_n + \frac{1}{4}$.

Remplaçons dans la relation de récurrence u_n par $v_n - \frac{1}{4}$. On obtient

$$(n+2)^2\left(v_{n+1} - \frac{1}{4}\right) = n^2\left(v_n - \frac{1}{4}\right) - (n+1).$$

On constate que cette relation se ramène, après calculs à

$$(n+2)^2 v_{n+1} = n^2 v_n.$$

On se sert de cette relation pour trouver le terme général de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En effet, on a

$$v_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^2 v_n = \left(\frac{n}{n+2}\right)^2\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 v_{n-1} = \left(\frac{\cancel{n}}{n+2}\right)^2\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2\left(\frac{n-2}{\cancel{n}}\right)^2 v_{n-2}$$

On voit donc apparaître une suite télescopique qui nous permet de deviner la terme général de v_n (tous les dénominateurs sauf les deux premiers semblent se neutraliser, ainsi que tous les numérateurs sauf les deux derniers). On montre alors par une récurrence immédiate que

$$v_n = \left(\frac{2}{(n(n+1)}\right)^2 v_1.$$

On constate que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend bien vers 0, ou encore que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\frac{-1}{4}$.